Vježbe 11

1. Na prethodnom času je generisan BCH kod (15, 3) i kodirana je poruka 10111, tako da glasi: $c(x)$=100100011110101. Generisati 3 greške u ovoj poruci, pa je potom dekodirati.

Rješenje:

Neka se greške nalaze na pozicijama 7, 8 i 9. Primljena poruka je:

$$r=\begin{array}{cccccccccccccccc} [1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1] \\ {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 7} & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 13} & {\scriptstyle 14} \end{array}$$

Zapišimo opšti oblik sindroma, $S_j = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \alpha_i^{-j}$, $j = 1, 2, ..., 2w$ za posmatranu primljenu poruku:

$S_j = 1 + \alpha^{3j} + \alpha^{10j} + \alpha^{12j} + \alpha^{14j}$.

Pojedini sindromi su (sjetite se da smo ranije dokazali da je $\alpha^{15} = 1$):

$S_1 = 1 + \alpha^3 + \alpha^{10} + \alpha^{12} + \alpha^{14}$,

$S_2 = 1 + \alpha^6 + \alpha^{20} + \alpha^{24} + \alpha^{28} = 1 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^9 + \alpha^{13}$,

$S_3 = 1 + \alpha^9 + \alpha^{30} + \alpha^{36} + \alpha^{42} = 1 + \alpha^9 + 1 + \alpha^6 + \alpha^{12} = \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{12}$,

$S_4 = 1 + \alpha^{12} + \alpha^{40} + \alpha^{48} + \alpha^{56} = 1 + \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^3 + \alpha^{11}$,

$S_5 = 1 + \alpha^{15} + \alpha^{50} + \alpha^{60} + \alpha^{70} = 1 + 1 + \alpha^5 + 1 + \alpha^{10} = 1 + \alpha^5 + \alpha^{10}$,

$S_6 = 1 + \alpha^{18} + \alpha^{60} + \alpha^{72} + \alpha^{84} = 1 + \alpha^3 + 1 + \alpha^{12} + \alpha^9 = \alpha^3 + \alpha^{12} + \alpha^9$.

Iskoristimo stepene primitivnog korjena prostog polinoma na kome je baziran dati kod (tabela kreirana na prethodnom času):

α^0	0001
α^1	0010
α^2	0100
α^3	1000
α^4	1001
α^5	1011
α^6	1111
α^7	0111
α^8	1110
α^9	0101
α^{10}	1010
α^{11}	1101
α^{12}	0011
α^{13}	0110
α^{14}	1100

Za S_1:

α^0	0001
α^3	1000
α^{10}	1010
α^{12}	0011
α^{14}	1100
S_1=	1100= α^{14}

Za S_2:

α^0	0001
α^5	1011
α^6	1111
α^9	0101
α^{13}	0110
S_2=	0110= α^{13}

Za S_3:

α^6	1111
α^9	0101
α^{12}	0011
S_3=	1001= α^4

Za S_4:

α^0	0001
α^3	1000
α^{10}	1010
α^{11}	1101
α^{12}	0011
S_4=	1101= α^{11}

Za S_5:

α^0	0001
α^5	1011
α^{10}	1010
S_5=	0000=0

Za S_6:

α^3	1000
α^9	0101
α^{12}	0011
S_6=	1110= α^8

Sada sindrom možemo pisati:

$S(x) = S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + ... + S_{2w} x^{2w-1}$,

$S(x)=\alpha^{14}+\alpha^{13}x+\alpha^4x^2+\alpha^{11}x^3+0x^4+\alpha^8x^5$.

U cilju dekodiranja primljene poruke, primjenimo dalje Euklidski algoritam na polinome $x^{2w}=x^6$ i dobijeni sindrom:

i	*V*	*R*	*Q*
-1	0	[0, *, *, *, *, *]	...
0	1	[8, *, 11, 4, 13, 14]	...
1	[7, *]	[3, 11, 5, 6, *]	[7, *]
2	[12, 5, 0]	[1, 14, 5, 16]	[5, 13]
3	[14, 12, 4, 5]	[14, *, 4]	[2, 5]

Podsjećanja radi, osnovne relacije u Euklidskom algoritmu (koje koristimo za popunjavanje gornje tabele) su:

$r_{-1}=prvi\ polinom$, $r_0=drugi\ polinom$, $v_{-1}=0$, $v_0=1$

$g_{k+1}=r_{k-1}/r_k$, $v_{k+1}=v_{k-1}-q_{k+1}v_k$.

Tako smo u prvoj iteraciji, za k=1, u cilju dobijanja q_1 i r_1 podijelili r_{-1} i r_0 (q_1 će biti rezultat dijeljenja, a r_1 ostatak dijeljenja):

$$x^6:(\alpha^8x^5+\alpha^{11}x^3+\alpha^4x^2+\alpha^{13}x+\alpha^{14})=x\alpha^{-8}=x\alpha^7$$

$$\underline{x^6+\alpha^3x^4+\alpha^{-4}x^3+\alpha^5x^2+\alpha^6x}$$

$$\alpha^3x^4+\alpha^{11}x^3+\alpha^5x^2+\alpha^6x$$

pa odatle q_1=[7, *] (upisujemo eksponente, a sa * označavamo nepostojanje određenog stepena) i r_1= [3, 11, 5, 6, *]. Takođe, primjenom relacije za v_{k+1}:

v_1= v_{-1}- q_1 v_0=[7, *].

U drugoj iteraciji, za k=2, dijelimo $(\alpha^8x^5+\alpha^{11}x^3+\alpha^4x^2+\alpha^{13}x+\alpha^{14})$ i $(\alpha^3x^4+\alpha^{11}x^3+\alpha^5x^2+\alpha^6x)$, i dobijamo q_2 i r_2.

Ovaj postupak primjenjujemo zaključno sa k=3 (odnosno do kada stepen polinoma r padne ispod w).

Sada za $v_3(x)=(\alpha^{14}x^3+\alpha^{12}x^2+\alpha^4x+\alpha^5)$ tražimo vrijednosti x za koje će dati polinom biti jednak nuli. Ispostavlja se da će $v_3(\alpha^6)$, $v_3(\alpha^7)$ i $v_3(\alpha^8)$ biti nule ovoga polinoma, pa zaključujemo da su greške nastale na pozicijama: 15–6=9, 15–7=8 i 15–8=7:

$$v_3(\alpha^6)=\alpha^{14}(\alpha^6)^3+\alpha^{12}(\alpha^6)^2+\alpha^4(\alpha^6)+\alpha^5=$$
$$=\alpha^{14}\alpha^{18}+\alpha^{12}\alpha^{12}+\alpha^4\alpha^6+\alpha^5=$$
$$=\alpha^2+\alpha^9+\alpha^{10}+\alpha^5$$

α^2	0100
α^5	1011
α^9	0101
α^{10}	1010
	0000

Isto se jednostavno pokazuje za $v_3(\alpha^7)$ i $v_3(\alpha^8)$.